Aix–Marseille Université 2017-2018

Algèbre linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°3

1 Echelonnement d'une matrice, rang, calcul de l'inverse

Exercice 1 * Échelonner les matrices suivantes, trouver leur rang et dire si elles sont inversibles. Le cas échéant calculer leurs inverses par échelonnement total :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 * Pour quelles valeurs du paramètre t, la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1+t & -1 & 2 \\ 2 & -t & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 * Trouver le rang des matrices suivantes.

$$(i) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad (iii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Trouver le rang des matrices suivantes en fonction de la valeur du paramètre p.

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & p & -1 & 2 \\ 2 & -1 & p & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2 Resolution de systèmes linéaires

Exercice 5 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants. Vérifier si la solution obtenue est correcte.

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+3y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4x+3y=2 \\ 7x+5y=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+4y=3 \\ 3x+6y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 4x+6y=0 \end{cases}.$$

Exercice 6 * Déterminer les solutions des systèmes suivants. Décrire votre solution en termes d'intersections de plans. Il n'est pas nécessaire de faire un dessin.

$$\begin{cases} x+4y+z=0 \\ 4x+13y+7z=0 \\ 7x+22y+13z=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=0 \\ 6x+y+4z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+4y+z=0 \\ 4x+13y+7z=0 \\ 7x+22y+13z=0 \end{cases}.$$

Exercice 7 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3y+4z=3 \\ x+4y+5z=4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 7x+2y-3z=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ -x+4y+2z=2 \\ 7x-6y-8z=-4 \end{cases}.$$

Exercice 8 * Ayant à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{cases} 2x+7y+z=1 \\ 2x+3y-5z=4 \\ -4x+3y+z=5 \end{cases}$$

un étudiant démarre ainsi :

$$\begin{array}{cccccc} \text{j'élimine} & x & \text{en} & \text{retranchant} & e_2 \text{ de } e_1 : & 4y+6z=-3 \\ '' & y & '' & '' & e_3 \text{ de } e_2 : & 6x-6z=-1 \\ '' & z & '' & '' & e_1 \text{ de } e_3 : & -6x-4y=4 \end{array}$$

Le système ainsi obtenu est-il équivalent au système initial ? Résoudre le système par la méthode de Gauss.

Exercice 9 Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-z=-12 \\ 3x-5y+13z=18 \\ x-2y+5z=k \end{cases},$$

où k est un nombre arbitraire.
Pour quelles valeurs de k le système a-t-il au moins une solution ? Pour chacune de ces valeurs de k, déterminer le nombre de solutions du système. Déterminer toutes les solutions pour chaque valeur de k.

Exercice 10 Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p)$, $(2, q)$, $(3, r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

Exercice 11 Résoudre les systèmes linéaires suivants selon la valeur du paramètre a :

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+y+az=2 \\ x+ay+z=3 \end{array} \right. , \quad (ii) \left\{ \begin{array}{c} ax+y+2z=1 \\ ax+ay+3z=1 \\ ax+ay+az=1 \end{array} \right. , \quad (iii) \left\{ \begin{array}{c} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{array} \right. ,$$

$$(iv) \left\{ \begin{array}{c} (a-2)x+(2a-1)y=2-a \\ 2x+(3+a)y=2a \end{array} \right. , \quad (v) \left\{ \begin{array}{c} x+ay-z=1 \\ 2x-y+az=0 \\ x+10y-6z=a \end{array} \right. , \quad (vi) \left\{ \begin{array}{c} x+2y-z=3 \\ 2x-3y+z=1 \\ 8x-5y+z=a \\ x+y-z=0 \end{array} \right. .$$

Exercice 12 Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} x+y+z= \ 2 \\ 5x+4y+3z= \ 2 \\ 6x+3y+2z= \ -4 \end{array} \right. , \quad (ii) \left\{ \begin{array}{l} x+2y-2z= \ 1 \\ -x+3y= \ 0 \\ -2y+z= \ -3 \end{array} \right. , \quad (iii) \left\{ \begin{array}{l} x+2y-2z+4t= \ 2 \\ y+3z-4t= \ -2 \\ z-2t= \ 0 \\ x+y-z+2t= \ 2 \end{array} \right. ,$$

$$(iv) \left\{ \begin{array}{l} x-y+z-t+w=0 \\ x+y+2z-t=0 \\ 2x-2y+3z-t+2w=0 \\ 4x-2y+6z-3t+3w=0 \end{array} \right. , \quad (v) \left\{ \begin{array}{l} x+2y-2z+4t+u= \ 0 \\ y+3z-4t+2u= \ 0 \\ x+z-2t+3u= \ 0 \\ x+y+4z-6t+5u= \ 0 \\ 3y+2t= \ 0 \end{array} \right. .$$

3 Application de l'échelonnement aux familles de vecteurs

Exercice 13 * Vérifier que les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels, respectivement de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$, en déterminer des bases et en déduire leurs dimensions.

$$\begin{array}{ll} F & = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\} \\ G & = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0 \text{ et } x=y\} \\ H & = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y+z-t=0\} \\ K & = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y+z=0 \text{ et } x+y+z+t=0\} \end{array}$$

Exercice 14 Considérons la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$v_1=(1,-1,0,2), \quad v_2=(1,0,1,2), \quad v_3=(1,3,5,7), \quad v_4=(0,2,3,\alpha),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de α la famille forme une base de $\mathbb{R}^4$?

2. Dans le cas où la famille est liée, déterminer toutes les relations linéaires liant ces vecteurs. Quelle est la dimension de l'espace engendré ?

3. Soit $v = (-2, k, 1, 3)$. Pour quelles valeurs de k a-t-on $v \in Vect\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$? Dans ce cas, déterminer les composantes du vecteur v dans une base de $Vect\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exercice 15 *

Quel est le rang des familles de vecteurs suivantes ? Sont-elles libres ? Donner une équation du sous-espace engendré.

1. $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1)$.
2. $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$.
3. $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, -1, 1, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1, 0)$.
4. $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 1)$, $v_4 = (1, 0, 1, 0)$.
5. $v_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $v_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $v_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $v_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

Exercice 16 * Déterminer les relations linéaires liant les vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, -1, 0, 0), \quad u_2 = (1, 0, -1, 0), \quad u_3 = (1, 0, 0, -1),$$

$$u_4 = (0, 1, -1, 0), \quad u_5 = (0, 1, 0, -1), \quad u_6 = (0, 0, 1, -1).$$

Trouver le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants parmi ces vecteurs.

Exercice 17 Répondre aux questions de l'exercice précédent dans le cas des vecteurs $P_1 = X^3 + 4X^2 - 2X + 3$, $P_2 = 2X^3 + 10X^2 - 3X + 7$ et $P_3 = 2X^3 + 4X^2 - 6X + 4$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 18 * Déterminer la dimension des sous espaces vectoriels engendrés par chacune des 2 familles de vecteurs ci-dessous. Donnez en une base et exprimer les coordonnées de chacun des vecteurs de la famille dans la base trouvée.

1. $v_1 = (1, 2, 3, 4), \quad v_2 = (2, 3, 4, 5), \quad v_3 = (3, 4, 5, 6), \quad v_4 = (4, 5, 6, 7), \quad v_5 = (5, 6, 7, 8).$
2. $w_1 = (1, 3, 0, -1), \quad w_2 = (1, 2, 3, 0), \quad w_3 = (0, -1, 0, 4), \quad w_4 = (1, 0, 0, -13).$

Exercice 19

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs suivante :

$$(1, 1, \alpha),\ (1, \alpha, 1),\ (\alpha, 1, 1).$$

Déterminer en fonction de α le rang de cette famille de vecteurs.